Exo I

1. Th. d'Ampère. 7 étapes :

- Base $(M, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$. Coordonnées cylindriques 1
- Sym : $(M, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}) = \pi^-$
  $(M, \vec{e_\rho}, \vec{e_z}) = \pi^+$
  $(M, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$ = qqconque

  $\Big\}\ \vec{B_1} \in \pi^-$, $\perp \pi^+$ $\Rightarrow \vec{B_1}(M) = B_{1\varphi}(M)\vec{e_\varphi}$ 1
- Inv : Par rotation selon φ, Par translation selon z $\Big\}$ Principe de Curie 1 $\Rightarrow \vec{B_1}(M) = B_{1\varphi}(\rho)\vec{e_\varphi}$
- $\oint \vec{B_1}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{enl}$. Contour : cercle centré sur Oz, passant par M, de rayon ρ. 1
- $\oint \vec{B_1}\cdot\vec{dl} = \oint \underbrace{B_1 \vec{e_\varphi}\cdot\rho\, d\varphi\, \vec{e_\varphi}}_{q=1} = \int_0^{2\pi} B(\rho)\cdot\rho\cdot d\varphi = B_1(\rho)\cdot\rho\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi$
  $= 2\pi\rho\, B_1(\rho)$ 1
- $\sum I_{enl}$? Circulation choisie avec $\vec{dS} \parallel I_1$.
  $\Rightarrow \sum I_{enl} = +I_1$ 1
- $\oint \vec{B_1}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{enl} \Leftrightarrow 2\pi\rho\, B_1(\rho) = \mu_0 I_1 \Rightarrow \boxed{\vec{B_1}(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\vec{e_\varphi}}$ 1

2. Dans le plan xOz : $\vec{e_\varphi} = \vec{e_y}$, $\rho = x$ $\Rightarrow \boxed{\vec{B_1}(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e_y}}$ 1

3. Force de Laplace : $d\vec{F} = I_2 \vec{dl} \wedge \vec{B_1}$

a) $\vec{F}_{MN} = \int_M^N I_2 \vec{dl} \wedge \vec{B_1}$. $\underline{1}$ Sur MN, $\vec{B_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x_0-a)} \vec{e_y}$.

$\vec{dl} = dz \vec{e_z}$.

$\Rightarrow \vec{F}_{MN} = \int_M^N I_2 dz \, \vec{e_z} \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x_0-a)} \vec{e_y}$ $\quad \vec{e_z} \wedge \vec{e_y} = -\vec{e_x}$.

$= -\int_M^N \underbrace{\frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi(x_0-a)}}\vec{e_x} dz = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(x_0-a)} \vec{e_x} \int_{-b}^{b} dz$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{MN} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi(x_0-a)} \vec{e_x}}$ $\underline{1}$ $\Rightarrow$ force vers les $x<0$

b) $\vec{F}_{PQ} = \int_P^Q I_2 \vec{dl} \wedge \vec{B_1}$ Sur PQ, $\vec{B_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x_0+a)} \vec{e_y}$.

$\Leftrightarrow \vec{F}_{PQ} = \int_P^Q \underbrace{-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(x_0+a)}} \vec{e_x} dz$ $\quad \vec{dl} = dz \vec{e_z}$ (signe - pris avec les bornes de l'intégrale)

$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \vec{e_x}}{2\pi(x_0+a)} \int_b^{-b} dz \boxed{= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi(x_0+a)} \vec{e_x}}$ $\underline{2}$ $\Rightarrow$ force vers les $x>0$

c) $\vec{F}_L = \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{PQ} = \left[-\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi(x_0-a)} + \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi(x_0+a)}\right] \vec{e_x}$

$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \left[\frac{1}{x_0+a} - \frac{1}{x_0-a}\right] \vec{e_x}$ $\underline{1}$ $<0 \Rightarrow$ le cadre est attiré vers le fil.

d) Cadre attiré par le fil déduit par la règle du flux max.

$\vec{B_1} \parallel \vec{e_y}$. donc $\phi = \iint_{S_2} \vec{B_1} . \vec{dS_2} > 0$.

$\vec{dS_2} \parallel \vec{e_y}$ (selon le sens de I_2).

$\Downarrow$ 1

$\phi \nearrow$ si cadre s'approche du fil.

4. $I_2 = 0$.

a) $\vec{V_0} = V_0 \vec{e_x}$ V_0 cste.

i. $\vec{E_m} = \vec{V_0} \wedge \vec{B_1}(M) = V_0 \vec{e_x} \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{e_y} = \boxed{\frac{\mu_0 I_1 V_0}{2\pi x} \vec{e_z}}$ 1 1

ii. 2 méthodes $\nearrow e = \oint \vec{E_m} . \vec{dl}$

$\searrow e = -\frac{d\phi}{dt}$

Avec $e = \oint \vec{E_m} . \vec{dl}$: $\oint \vec{E_m} . \vec{dl} = \int_M^N \underbrace{\vec{E_m} . \vec{dl}}_{\vec{e_z}\ \vec{e_z},\ =1} + \int_N^P \underbrace{\vec{E_m} . \vec{dl}}_{\vec{e_z}\ \vec{e_x},\ \perp = 0} + \int_P^Q \underbrace{\vec{E_m} . \vec{dl}}_{\vec{e_z}\ \vec{e_z},\ =1} + \int_Q^M \underbrace{\vec{E_m} . \vec{dl}}_{\vec{e_z}\ \vec{e_x},\ \perp = 0}$

$\Leftrightarrow \oint \vec{E_m} . \vec{dl} = \int_M^N \frac{\mu_0 I_1 V_0}{2\pi(x_0 - a)} dz + \int_Q^M \frac{\mu_0 I_1 V_0}{2\pi(x_0 + a)} dz$

$= \frac{\mu_0 I_1 V_0}{2\pi(x_0 - a)} \int_{-b}^{b} dz + \frac{\mu_0 I_1 V_0}{2\pi(x_0 + a)} \int_{b}^{-b} dz = \boxed{\frac{\mu_0 I_1 V_0 b}{\pi} \left[\frac{1}{x_0 - a} - \frac{1}{x_0 + a}\right]}$

Avec $e = -\frac{d\phi}{dt}$: $\phi = \iint \vec{B_1} . \vec{dS_2} = \iint \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \underbrace{\vec{e_y} . dx\, dz\, \vec{e_y}}_{=1}$

$= \int_{x_0 - a}^{x_0 + a} \int_{-b}^{b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx\, dz = \frac{\mu_0 I_1 b}{\pi} \left[\ln(x_0 + a) - \ln(x_0 - a)\right]$

Ici $x_0 = V_0 t$.

$$\Rightarrow \phi(t) = \frac{\mu_0 I_1 b}{\pi}\left[\ln(V_0 t + a) - \ln(V_0 t - a)\right]$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_1 b}{\pi}\left[\underbrace{\frac{d}{dt}\ln(V_0 t + a)}_{\frac{V_0}{V_0 t + a} = \frac{V_0}{x_0 + a}} - \underbrace{\frac{d}{dt}\ln(V_0 t - a)}_{\frac{V_0}{V_0 t - a} = \frac{V_0}{x_0 - a}}\right]$$

$$\boxed{= \frac{\mu_0 I_1 V_0 b}{\pi}\left[\frac{1}{(x_0 - a)} - \frac{1}{(x_0 + a)}\right]} \quad \text{CQFD}$$

1

iii. Sens $M \to N \to P \to Q$ ($e > 0$ par rapport au sens de circulation choisi).

On aurait pu utiliser la loi de Lenz :

Si $V_0 \vec{e_x}$, flux $\downarrow \Rightarrow \vec{B_2}$ // à $\vec{B_1}$ pour compenser la diminution du flux. 1

b) i. $\vec{E_m} = \vec{V_0} \wedge \vec{B_1}$. Ici $\vec{V_0} = V_0 \vec{e_z}$.

$$\Rightarrow \vec{E_m} = V_0 \vec{e_z} \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{e_y} = \boxed{-\frac{\mu_0 I_1 V_0}{2\pi x} \vec{e_x}}$$

1

ii. $$e = \oint \vec{E_m}\cdot\vec{dl} = \cancel{\int_M^N \vec{E_m}\cdot\vec{dl}} + \int_N^P \vec{E_m}\cdot\vec{dl} + \cancel{\int_P^Q \vec{E_m}\cdot\vec{dl}} + \int_Q^M \vec{E_m}\cdot\vec{dl}$$

($\vec{e_x} \perp \vec{e_z}$: $\perp = 0$; $\vec{e_x}$, $\vec{e_x}$: $// = 1$; $\vec{e_x}$, $\vec{e_z}$: $\perp = 0$; $\vec{e_x}$, $\vec{e_x}$: $// = 1$)

$$= -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[\int_{x_0 - a}^{x_0 + a}\frac{dx}{x} + \int_{x_0 + a}^{x_0 - a}\frac{dx}{x}\right] = 0 \, !$$

1

$e = -\dfrac{d\phi}{dt} = 0$ car pas de variation du flux lors du déplacement.

Exo II

1. a) Sym : Coordonnées cylindrique (ρ, φ, z).
Base $(M, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l}(M, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}) = \Pi^+ \\ (M, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}) = \Pi^-\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\vec{A} \in \Pi^+ \\ \perp \Pi^-\end{array} \Rightarrow \vec{A} = A_\varphi(M)\,\vec{e_\varphi}.$$ (1)

Inv : Par translation selon z (solénoïde ∞)
Par rotation selon φ

$\Downarrow$

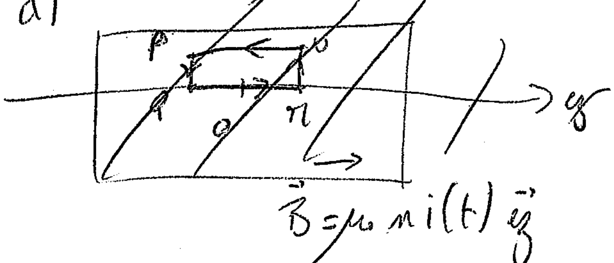
Principe de Curie $\Rightarrow \vec{A}(M) = A_\varphi(\rho)\,\vec{e_\varphi}$ (1)

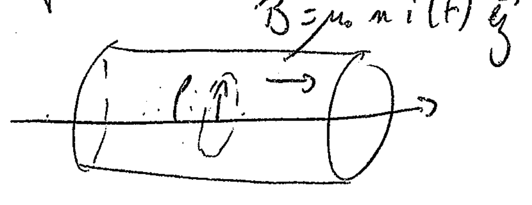
b) $\vec{B}_\infty = \vec{rot}\,\vec{A}$ (1)

c) $\iint \vec{B}_\infty \cdot \vec{dS} = \iint \vec{rot}\,\vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl}$. (1)

contour s'appuyant sur la surface

d)





Contour : cercle centré sur Oz, de rayon ρ.

$$\oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} A \underbrace{\vec{e_\varphi} \cdot \rho\, d\varphi\, \vec{e_\varphi}}_{=1} = 2\pi\rho\, A(\rho).$$

$$\iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \mu_0\, n\, i(t) \underbrace{\vec{e_z} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi\, \vec{e_z}}_{=1} = \mu_0\, n\, i(t)\, \pi\rho^2$$

$$\Rightarrow \mu_0 n i(t) \pi \rho^2 = 2\pi \rho A(\rho)$$

$$\Rightarrow A(\rho) = \frac{\mu_0 n i(t) \rho}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{int}(M) = \frac{\mu_0 n i(t) \rho}{2} \vec{e_\varphi}$$

$$\boxed{= \frac{\mu_0 n I_m \cos(\omega t) \rho}{2} \vec{e_\varphi}} \quad \underline{2}$$

e. $$\vec{E}_{int}(M,t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \boxed{\frac{\mu_0 n \rho I_m \omega \sin(\omega t)}{2} \vec{e_\varphi} \quad \underline{2}}$$

2. a) $dP_J(t) = \vec{J} \cdot \vec{E}_{int}(M,t) dV$ $\underline{1}$

b) $\vec{J} = \gamma \vec{E}_{int}(M,t) \Rightarrow dP_J(t) = \gamma E_{int}^2(M,t) dV$ $\underline{2}$

c) à intégrer $\underline{1}$